DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF TANGGA L_n DAN GRAF BIPARTISI LENGKAP $K_{m,n}$

Sutrisna Wati
SMKN 1 Sampang
Email: watysutrisno@gmail.com

Abstrak
Teori Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mengalami perkembangan pesat. Model-model yang ada dalam teori graf berguna untuk menyelesaikan suatu permasalahan sehari-hari, seperti masalah sistem jaringan komonikasi. Objek dimodelkan dengan titik dan hubungan antar objek dimodelkan dengan sisi. Jarak (*distance*) antara dua titik *u* dan *v* di G adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan *u* ke *v*. Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(u)$ dari titik *u* di G adalah maksimum jarak dari *u* ke setiap titik lain di G. Titik *v* adalah titik eksentrik (*vertex eccentric*) dari *u* jika jarak sama dengan eksentrisitasnya. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari graf *G* merupakan graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di *G* atau $V(ED(G))=V(G)$, dan terdapat sisi berarah yang menghubungkan titik *u* ke *v* jika dan hanya jika *v* titik eksentrik dari *u*. Masalah yang dikaji dalam tugas akhir ini adalah menentukan digraf eksentrik dari graf tangga L_n dan graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$. Selain itu, dalam tugas akhir ini juga dibahas tentang iterasi bentuk ke-*k* dari digraf eksentiknya.

Kata kunci :eksentrisitas, digraf eksentrik, dan graf bipartisi lengkap.

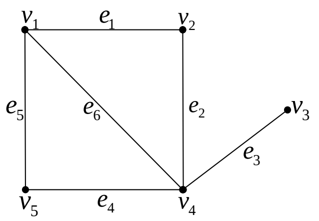
PENDAHULUAN

Teori Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh pakar matematika asal Swiss bernama Leonardo Euler pada tahun 1736 (Suryadi, 1996: 3). Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Panjang lintasan terpendek yang menghubungkan dua titik *u* dan *v* di graf G disebut *jarak*. *Eksentrisitas* suatu titik *u* atau $e(u)$ merupakan maksimum jarak dari titik *u* ke setiap titik lain di graf G. Titik v disebut titik eksentrik dari *u* jika jarak antar dua titik tersebut sama dengan eksentrisitasnya.

Suatu graf G yang memperhatikan sisi sebagai pasangan berurutan himpunan titik $V(G)$ disebut *digraf*. Digraf eksentrik $ED(G)$ merupakan graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di *G* dan terdapat sisi berarah yang menghubungkan titik *u* ke *v* jika dan hanya jika *v* titik eksentrik dari *u* (Nugroho, 2003: 3). Penelitian Bukley menyimpulkan bahwa hampir semua graf *G*, digraf eksentriknya adalah $ED(G)=\overline{G}$, dengan $\overline{G}$ adalah komplemen dari *G* (Boland dan Miller, 2001: 2). Terinspirasi dengan karya yang dihasilkan oleh Buckley selanjutnya Miller dan kawan-kawan memperkenalkan iterasi dari digraf eksentrik ke-*k* dari digraf *G*. Digraf eksentrik iterasi ke-*k* G ditulis sebagai $ED^k(G)=ED^{k-1}(G)$. untuk k bilangan bulat dan $k \geq 2$, (Miller dkk, 2002: 2).

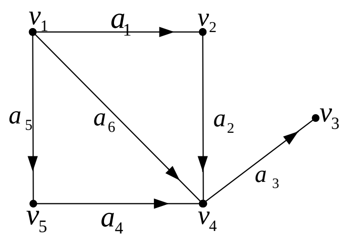
Anggraini (2006) telah mempelajari dan mengkaji digraf eksentrik dari turnamen transitif dan regular. Suatu graf tangga L_n dan graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ memiliki sifat yang hampir sama dengan turnamen. Sehingga dalam tugas akhir ini diambil judul "*Digraf eksentrik dari graf tangga dan graf bipartisi lengkap*". Tujuan kajian adalah: 1) untuk menentukan digraf eksentrik dari graf tangga L_n dan bentuk iterasi dari digraf eksentriknya 2) Bagaimana menentukan digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ dan bentuk iterasi dari digraf eksentriknya.

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan pasangan tidak kosong yang unsurnya disebut titik (*vertex*) dan $E(G)$ yang merupakan himpunan pasangan tak terurut unsur-unsur dari $V(G)$ yang unsurnya disebut sisi (*edge*) (Munir, 2001: 291). Contoh graf *G* dengan himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ ditunjukkan pada Gambar 1 berikut:



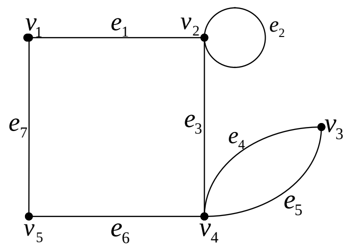
Gambar 1 Graf *G*

Digraf D adalah pasangan himpunan $(V(D),A(D))$ dengan $V(D)$ adalah himpunan tak kosong yang masing-masing unsurnya disebut titik (*vertex*) dan $A(D)$ merupakan himpunan pasangan berurutan dari titik-titik yang unsurnya disebut *sisi berarah* (Cahyono, 2000: 34). Contoh digraf *D* dengan himpunan titik $V(D)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan sisi berarah $A(D)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ ditunjukkan pada Gambar 2 berikut:



Gambar 2. Digraf *D*

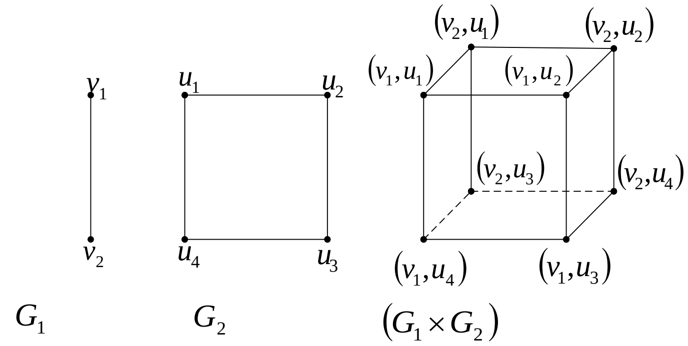
Dalam graf *G* apabila terdapat lebih dari satu sisi e yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap*. sisi e dikatakan *loop*, jika sisi e tersebut menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri. Graf yang tidak memuat sisi rangkap dan *loop* dinamakan *graf sederhana*. Contoh graf yang memuat sisi rangkap dan *loop* diberikan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf dengan sisi *rangkap* dan *loop*

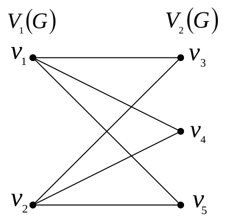
Sebuah *jalan* (*walk*) *W* pada graf *G* adalah barisan berhingga yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu: $W=v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,e_3,\ldots,v_{n-1},e_n,v_n\ ;\ (n\geq 0)$ dengan suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga $\{v_i,v_{i+1}\}$ adalah sisi di G, untuk $1\leq i\leq n-1$. Suatu jalan yang titik-titiknya tidak ada pengulangan didefinisikan sebagai *lintasan sederhana* (*simple path*). Jalan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama didefinisikan sebagai *Lintasan tertutup*.

Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 atau dinotasikan dengan $G=G_1\times G_2$ adalah graf dengan $V(G)=V(G_1)\times V(G_2)$ dan sisi $(u_1,v_1)(u_2,v_2)\in E(G)$ jika dan hanya jika $u_1=u_2$ dan $v_1,v_2\in E(G_2)$ atau $v_1=v_2$ dan $u_1,u_2\in E(G_1)$(Cahyono, 2000:24).



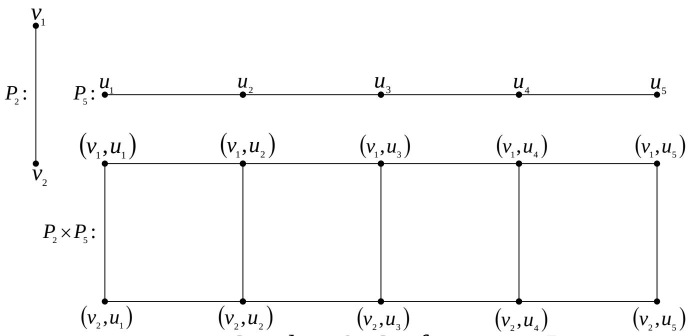
Gambar 4. Graf hasil kali kartesius

Jika himpunan titik dalam graf di partisi menjadi dua himpunan titik $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$ sehingga setiap titik di $V_1(G)$ dihubungkan dengan tiap titik di $V_2(G)$, maka graf ini dikatakan *graf bipartisi lengkap* atau $K_{m,n}$.



Gambar 5. Graf bipartisi lengkap

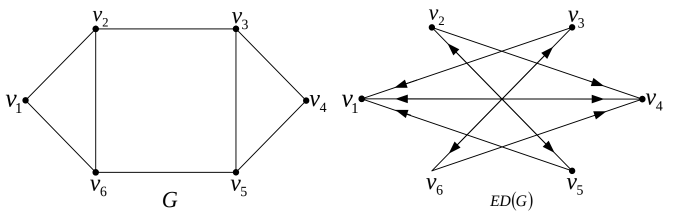
Graf tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan graf lintasan P_n, atau dituliskan dengan $P_2 \times P_n$.



Gambar 6. Graf tangga L_n

Jarak $d(u,v)$ antara dua titik *u* dan *v* pada graf *G* adalah panjang minimum lintasan dari titik *u* ke *v* (Cahyono, 2000: 54). *Eksentrisitas* (*eccentricity*) titik *v* atau $e(v)$ dari graf tersambung *G* didefinisikan sebagai maksimum jarak dari v kesetiap titik lain di *G* atau $e(v) = maks\{d(u,v) | u \in V(g)\}$. Titik *v* adalah *titik eksentrik* dari *u* jika $d(v,u) = e(u)$.

Digraf Eksentrik $ED(G)$ pada graf *G* didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di *G* atau $V(ED(G)) = V(G)$ dengan sisi berarah menghubungkan titik *u* ke *v*, jika v adalah titik eksentrik dari *u* (Nugroho, 2003: 3).



Gambar 7. Graf G dan digraf eksentriknya

Pengiterasian dari digraf eksentrik G pertama kali diperkenalkan oleh Miller dan kawan-kawan (2002). Bentuk digraf eksentrik iterasi ke-*k* G dapat di tulis sebagai $ED^k(G) = ED\left(ED^{k-1}(G)\right)$. Untuk *k* adalah bilangan bulat dan $k \geq 2$ (Miller dkk, 2002:2).

PEMBAHASAN

Digraf Eksentrik Dari Graf Tangga L_n dan bentuk iterasi dari digraf eksentriknya

Graf tangga L_n adalah graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan graf lintasan P_n. Misal, graf tangga L_n mempunyai himpunan titik $V(L_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan himpunan sisi

$E(L_n) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, o_1, o_2, \ldots, o_{n-1}, e*_1, e*_2, \ldots, e*_n\}$

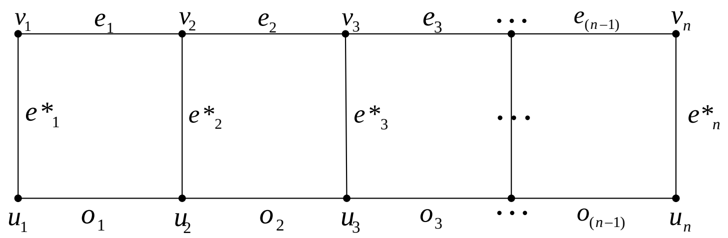
dengan

Sisi $e_i = v_i, v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

Sisi $o_i = u_i, u_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ dan

Sisi $e*_i = v_i, u_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Ilustrasi permodelan titik dan sisi dari graf tangga L_n perhatikan Gambar berikut:



Gambar 8. Permodelan graf tangga L_n

Untuk menentukan digraf eksentrik dari graf tangga L_n dibagi menjadi dua yaitu untuk *n*-ganjil dan *n*-genap. Adapun uraianya antara lain:

Digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan n-ganjil

Ada titik $v_{\frac{n+1}{2}}$ di V_i dan $u_{\frac{n+1}{2}}$ di U_i yang merupakan titik tengah untuk setiap himpunan titik pada graf tangga L_n dengan *n*-ganjil. Eksentrisitas titik *v* dari graf tangga L_n dengan *n*-ganjil adalah sebagai berikut:

Lemma 3.1 Eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan $o(u_i)$ pada graf tangga L_n untuk *n*-ganjil adalah

$$e(v_i) \text{ dan } o(u_i) = \begin{cases} (n-i)+1 & \text{untuk } i = 1, 2, \cdots, \frac{n+1}{2} \\ (i-1)+1 & \text{untuk } i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \cdots, n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi dan titik tengah $v_{\frac{n+1}{2}}$ graf tangga L_n dengan *n*-ganjil, untuk v_i adalah suatu titik pada V_i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dapat kita ketahui jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i

ke semua titik selain v_i adalah $(n-i)+1$ untuk $i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}$ dan $(i-1)+1$ untuk setiap $i=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n$. Demikian juga sebaliknya.

Akibat 3.1 Titik eksentrik pada graf tangga L_n untuk *n*-ganjil adalah sebagai berikut:

$$\text{Titik eksentrik dari } v_i \text{ dan } u_i = \begin{cases} u_n & \text{untuk } i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2} \\ u_1 & \text{untuk } i=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n \end{cases}$$

Berdasarkan Lemma 3.1. eksentrisitas dari graf tangga L_n dengan *n*-ganjil, dan titik $v_{\frac{n+1}{2}}$ adalah titik tengah di V_i, maka titik eksentriknya adalah titik u_n untuk $i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}$ dan titik u_1 untuk setiap $i=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n$ di U_i.

Lemma 3.2 Digraf eksentrik dari graf tangga L_n untuk *n*-ganjil adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(L_n))=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n,},u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ dan himpunan sisi berarah $A(ED(L_n))=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,q_1,q_2,\cdots,q_n\}$.

$$a_i \text{ dan } q_i = \begin{cases} v_iu_n & \text{untuk } i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2} \\ v_iu_1 & \text{untuk } i=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n \end{cases}$$

$$a_i \text{ dan } q_i = \begin{cases} u_iv_n \\ u_iv_1 \end{cases} \quad \text{untuk } i=\frac{n+1}{2}$$

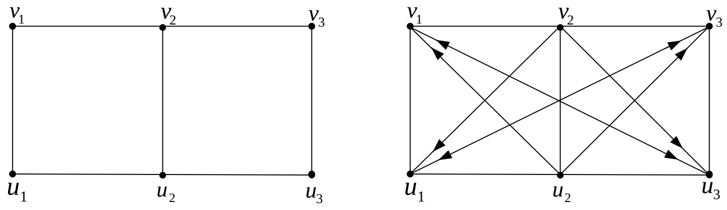
Berdasarkan Akibat 3.1 titik eksentrik untuk setiap titik V_i adalah u_n dan u_1 di U_i sehingga ada sisi berarah dari v_i ke u_n yaitu v_i,u_n untuk setiap $i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$. Selanjutnya dari v_i ke u_1 yaitu v_i,u_1 untuk setiap $i=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n$. Selain itu ada sisi berarah dari v_i ke u_n yaitu v_i,u_n dan dari v_i ke u_1 yaitu v_i,u_1 untuk setiap $i=\frac{n+1}{2}$.

Jadi berdasarkan Lemma 3.2. dapat disimpulkan bahwa banyaknya sisi berarah pada $ED(L_n)$ untuk *n*-ganjil adalah $|A(ED(L_n))|=2(n+1)$. Dengan demikian, digraf eksentrik dari graf tangga L_n untuk *n*-ganjil adalah digraf tripartite $\left(T_{2,2\left(\frac{n-1}{2}\right),2\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)$, dengan himpunan titik $V_1=\left\{v_{\frac{n+1}{2}},u_{\frac{n+1}{2}}\right\}$

$$V_2=\left\{v_1,v_2,\ldots,v_{\frac{n-1}{2}},u_1,u_2,\ldots,u_{\frac{n-1}{2}}\right\}$$ dan

$$V_3=\left\{v_{\frac{n+3}{2}},v_{\frac{n+5}{2}},\ldots,v_n,v_{\frac{n+3}{2}},u_{\frac{n+5}{2}},\ldots,u_n\right\}.$$

Contoh digraf eksentrik dari graf tangga L_n untuk *n*-ganjil diberikan pada Gambar 9 berikut.



Graf Tangga $L_n = P_2 \times P_3$ Digraf eksentriknya

Gambar 9

Bentuk iterasi digraf eksentrik dari graf tangga L_n ke-*k* adalah $ED^k(G)=ED^{k+2}(G)$, untuk k bilangan bulat positif dan $k \geq 1$.

Digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan n-genap

Eksentrisitas titik *v* pada graf tangga L_n dengan *n*-genap, untuk setiap himpunan titik $V(L_n)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ di jelaskan sebagai berikut:

Lemma 3.3 Eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan $o(u_i)$ pada graf tangga L_n untuk *n*-genap adalah

$$e(v_i) \text{ dan } o(u_i) = \begin{cases} (n-i)+1 \\ (i-1)+1 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi graf tangga L_n dengan *n*-genap, ada titik $v_{\frac{n}{2}}$ untuk setiap himpunan titiknya. Sehingga untuk v_i adalah suatu titik di V_i untuk setiap $i=1,2,3,\cdots,n$. Dapat kita ketahui jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari setiap titik v_i ke setiap titik selain v_i, adalah $(n-i)+1$ untuk $i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}$ dan $(i-1)+1$ untuk setiap $i=\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n$.

Akibat 3.3 Titik eksentrik pada graf tangga L_n untuk *n*-genap adalah sebagai berikut:

Titik eksentrik dari

$$v_i \text{ dan } u_i = \begin{cases} u_n & \text{untuk } i=1,2,\cdots,\frac{n}{2} \\ u_1 & \text{untuk } i=\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2},\cdots,n \end{cases}$$

Berdasarkan Lemma 3.3 eksentrisitas dari graf tangga L_n dengan *n*-genap, dan titik $v_{\frac{n}{2}}$ adalah suatu titik di V_i, maka titik eksentriknya adalah semua u_n untuk $i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$ untuk $i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}$ dan u_1 untuk setiap $i=\frac{n+2}{2},\frac{n+3}{2},\frac{n+4}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n$ di U_i.

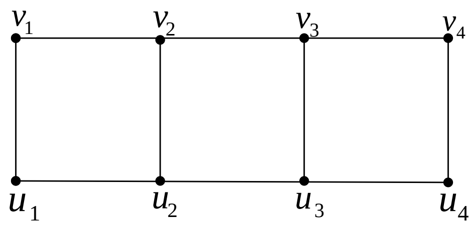
Lemma 3.4 Digraf eksentrik dari graf tangga L_n untuk *n*-genap adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(L_n))=\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ dan himpunan sisi berarah $A(ED(L_n))=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$.

$$a_i \text{ dan } q_i = \begin{cases} v_i u_n \text{ untuk } i=1,2,\cdots,\frac{n}{2} \\ v_i u_1 \text{ untuk } i=\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2},\cdots,n \end{cases}$$

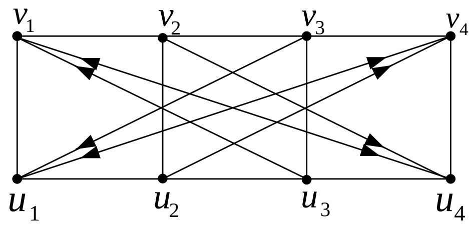
Berdasarkan Akibat 3.3 titik eksentrik untuk setiap titik V_i adalah u_n dan u_1 di U_i sehingga ada sisi berarah dari v_i ke u_n yaitu

v_i, u_n untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, \frac{n+1}{2}$, dan dari v_i ke v'_1 yaitu v_i, u_1 untuk setiap $i = \frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \cdots, n$.

Dari Lemma 3.4 Dapat disimpulkan bahwa digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-genap adalah digraf Bipartisi $\left(B_{2\left(\frac{n}{2}\right), 2\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$, dengan himpunan titik $V_1 = \left\{v_1, v_2, \cdots, v_{\frac{n}{2}}, u_1, u_2, \cdots, u_{\frac{n}{2}}\right\}$ dan $V_2 = \left\{v_{\frac{n+2}{2}}, v_{\frac{n+4}{2}}, \cdots, v_n, u_{\frac{n+2}{2}}, u_{\frac{n+4}{2}}, \cdots, u_n\right\}$ dengan sisi berarah dari titik $v_{\frac{n}{2}}$ di V_i tetangga keluar ke titik lain di U_i dan sisi berarah dari $u_{\frac{n}{2}}$ di U_i tetangga keluar ke titik lain di V_i. Hal ini berlaku juga untuk sisi berarah dari titik lain di V_i tetangga keluar ke titik lain di U_i dan sisi berarah dari titik lain U_i tetangga keluar ke titik lain di V_i. Jadi banyaknya sisi berarah dari digraf eksentik graf tangga L_n dengan *n*-genap adalah $|A(ED(L_n))| = 2n$. Contoh digraf eksentrik dari graf tangga L_n untuk *n*-genap diberikan pada Gambar 10 berikut.



Graf Tangga $L_n = P_2 \times P_4$



Digraf Eksentriknya

Pengiterasian ke-*k* dari digraf eksentrik graf tangga dengan *n*-genap. mempunyai bentuk $ED^k(G) = ED^{k-2}(G)$ untuk *k* bilangan bulat positif dan $k \geq 3$.

Digraf Eksentrik dari Graf Bipartisi Lengkap $K_{m,n}$ dan bentuk iterasi dari digraf eksentriknya

Misalkan graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ mempunyai himpunan titik:

$$V(K_{m,n}) = \begin{cases} V_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \\ V_2 = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_{m+n}\} \end{cases}$$

Dan himpunan $E(K_{m,n}) = \{e_{11}, e_{21}, \cdots, e_{n1}, e_{12}, e_{22}, \cdots, e_{n2}, \cdots, e_{nm}\}$ dengan $e_{ij} = v_j v_{m+i}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots, m$.

Lemma 3.5 Eksentrisitas titik v_i pada graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ adalah $e(v_i) = 2$ Untuksetiap $i = 1, 2, 3, \cdots, m+n$

Berdasarkan definisi digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap, jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v_i untuksetiap $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ di V_1 adalah semua titik di V_1 kecuali dirinya sendiri. Demikian juga jarak terjauh dari v_i untuk setiap $i = m+1, m+2, \cdots, m+n$ di V_2 adalah semua titik di V_2 kecuali dirinya sendiri yaitu dengan jarak 2. Jadi $e(v_i) = 2$ untuksetiap $i = 1, 2, 3, \cdots, m+n$.

Akibat 3.5

Titik eksentrik pada graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

Titik eksentrik di V_1 dari $v_i = v_j$ untuk $i, j = 1, 2, 3, \cdots, m \quad j \neq i$

Titik eksentrik di V_2 dari v_i = v_j untuk $i, j = m+1,\ m+2, \cdots, m+n$

$j \neq i$

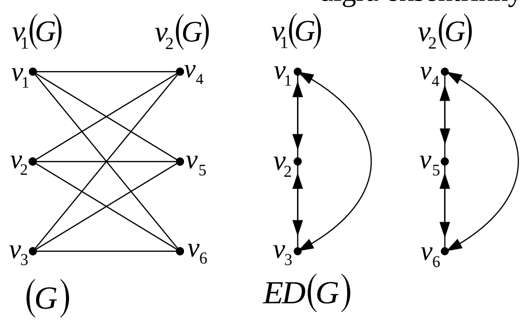
Berdasarkan lemma 3.5 eksentrisitas v_i, $e(v_i) = 2$. Titik eksentrik dari v_i di V_1 untuk setiap $i, j = 1, 2, 3, \cdots, m$ adalah v_j di V_1 untuk setiap $j = 1, 2, 3, \cdots, m$ dan $j \neq i$. Adapun titik eksentrik dari v_i di V_2 untuk $i = m+1,\ m+2, \cdots, m+n$ adalah v_j di V_2 untuk $j = m+1,\ m+2, \cdots, m+n$ dan $j \neq i$.

Lemma 3.6

Digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap $ED(K_{m,n})$ adalah digraf dengan himpunan titik $V(ED(K_{m,n})) = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{m,n}\}$ dan himpunan sisi berarah

$$A(ED(K_{m,n})) = \begin{cases} v_i v_j \text{ Untuk } i, j = 1, 2, \cdots, m \\ \qquad j \neq i \\ \text{Untuk } i, j = m+1,\ m+2, \cdots, m+n \\ v_i v_j \quad j \neq i \end{cases}$$

Berdasarkan akibat 3.5 titik eknsentrik dari v_i di V_1 untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ adalah v_j di V_1 untuk setiap $j = 1, 2, 3, \cdots, m$ dengan $j \neq i$, sehingga ada sisi berarah dari v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$ dan titik eksentrik dari v_i di V_2 untuk setiap $i = m+1,\ m+2, \cdots, m+n$ adalah v_j di V_2 utuk setiap $j = m+1,\ m+2, \cdots, m+n$ dengan $j \neq i$, sehingga ada sisi berarah dari titik v_i ke v_j yaitu $v_i v_j$. Contoh untuk mengilustrasikan graf bipartisi lengkap dan digra eksentriknya.



Gambar 11. Graf bipartisi lengkap dan digraf eksentriknya

Dari lemma 3.6 dapat disimpulkan bahwa digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap $ED(K_{m,n})$ adalah digraf komplemen $K_{m,n} = D(\overline{K}_{m,n})$ dengan himpunan titik $V(D(\overline{K}_{m,n})) = V(K_{m,n})$. Sisi berarah dari V_1 *adjacent* keluar kesemua titik di V_2 dengan jumlah sisi berarahnya $|A(ED(K_{m,n}))| = (m^2 + n^2) - (m+n)$.

Pengiterasian ke-*k* digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bentuk iterasi ke-*k*nya adalah $ED^{k+1}(G) = ED^k(G)$, untuk k bilangan bulat positif dan $k \geq 1$.

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikansebelumnya, selanjutnya kesimpulan yang dapat diambil tentang digraf eksentrik dari graf tangga L_n dan graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut:

1. Digraf eksentrik dari graf tangga L_n dibedakan menjadi dua, yaitu digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-ganjil dan digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-genap.
   a. Digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-ganjil adalah digraf tripartsi dengan jumlah sisi berarah dari $ED(L_n)$ untuk *n*-ganjil adalah

$\left|A(ED(L_n))\right| = 2(n+1)$. Bentuk iterasi ke-*k* digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-ganjil adalah $ED^k(G) = ED^{k+2}(G)$ untuk k bilangan bulat positif dan $k \geq 1$.

b. Digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-genap adalah digraf bipartisi dengan jumlah sisi berarah dari $ED(L_n)$ untuk *n*-genap adalah $\left|A(ED(L_n))\right| = 2n$. Iterasi digraf eksentrik dari graf tangga L_n dengan *n*-genap mempunyai bentuk $ED^k(G) = ED^{k-2}(G)$ untuk k bilangan bulat positif dan $k \geq 3$.

2. Digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ adalah digraf komplemen $K_{m,n} = D(\overline{K}_{m,n})$ dengan jumlah sisi berarah digraf eksentrik dari graf bipartisi lengkap $K_{m,n}$ adalah $\left|A(ED(K_{m,n}))\right| = (m^2 + n^2) - (m+n)$. Iterasi ke-*k* dari digraf eksentriknya mempunyai bentuk $ED^{k+1}(G) = ED^k(G)$, untuk *k* bilangan bulat positif dan $k \geq 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Anggraini, Dian, 2006. *Digraf Eksentrik Dari Turnamen Transitif Dan reguler*, Malang: Universitas Muhammadiyah Malang.

Boland, J, and Miller, M, 2001. *The eccentric digraph of a digraph*, preprint.

Buckley, F, 2002. *The eccentric digraph of a graph*, congressus numerantium

Cahyono, H, 2000. *Teori Graph*, UMM Press. Malang.

Chartrand, G, and Lesniak, L, 1996, *Graphs and Digraphs*, 3rd edition, Chapmann & hill : London.

Kreyszig, Erwin, 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*, PT Gamedia Pustaka Utama: Jakarta.

Miller, M, Gimbert, J, Ruskey, F, and Ryan, J, 2002. *Iterasion Of Eksentric Digraphs*, preprint.

Munir, R, 2003. *Matematika diskrit*, CV Informatika, Bandung.

Nugroho, K,W, 2002. *Eksentrik Digraph dari Graf Star, Double Sart dan Graf Komplit Bipartit*, (online). http://www.yahoo.com (diakses tanggal 07 juni 2006).

Siang, Jong Jeng, M. Sc, 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta.

Slamet, S, dan Makaliwe, H, 1991. *Matematika kombinatorik*, PT Elex Media Komputendo: Jakarta.

Suryadi, H.S, 1996. *Teori Graf Dasar*, Gunadarma: Jakarta